

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Гаврилов Сергей Александрович
Должность: И.О. Рядовой
Дата подписания: 08.07.2026 15:18:11
Уникальный программный ключ:
f17218015d82e3c1457d1df9e244def505047355

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Московский институт электронной техники»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

А.Г. Балашов

«27» 02 2026 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«Функциональный анализ»

Направление подготовки - 01.03.04 «Прикладная математика»

Москва, 2026

1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательных программ:

Компетенции, формируемые в дисциплине	Подкомпетенции, формируемые в дисциплине	Индикаторы достижения компетенций
ОПК-1. Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	ОПК-1 ФункАн. Способен использовать понятия и положения функционального анализа при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	<i>Знает</i> основные понятия функционального анализа: функциональные пространства, функционал, мера и интеграл Лебега. <i>Умеет</i> находить меры различных множеств, использовать понятия функциональных пространств для решения дифференциальных и интегральных уравнений. <i>Имеет опыт</i> использования понятий меры, банахова и гильбертова пространств, операторов различных типов в смежных математических дисциплинах

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина входит в обязательную часть Блока 1 «Дисциплины (модули)» образовательной программы.

Входные требования к дисциплине: для изучения дисциплины необходимо владение базовыми знаниями и умениями в области математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений.

3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Курс	Семестр	Общая трудоёмкость (ЗЕ)	Общая трудоёмкость (часы)	Контактная работа					Самостоятельная работа		Промежуточная аттестация
				Лекции (часы)	Лабораторные работы (часы)	Практические занятия (часы)	Текущий контроль/ групповые консультации (часы)	Промежуточная аттестация (часы)	Текущая СР (часы)	Подготовка к экзамену (часы)	
2	4	4	144	32	–	32	8	6	36	30	Экз

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

№ и наименование модуля	Контактная работа					Самостоя тельна работа		Формы текущего контроля
	Лекции (часы)	Лабораторные работы (часы)	Практические занятия (часы)	Текущий контроль/ групповые консультации (часы)	Промежуточная аттестация (часы)	Текущая СР (часы)	Подготовка к экзамену (часы)	
1. Полнота и интеграл Лебега	8	-	10	2	6	8	30	Защита индивидуального большого домашнего задания №1
2. Линейные и гильбертовы пространства	8	-	10	4		16		Контрольная работа № 1
								Защита индивидуального большого домашнего задания №2
								Контрольная работа № 2
3. Линейные операторы	16	-	12	2		12		Коллоквиум
								Защита индивидуального большого домашнего задания №3
								Защита индивидуального большого домашнего задания №4
							Контрольная работа № 3	

4.1. Лекционные занятия

№ модуля дисциплины	№ лекции	Объем занятий (часы)	Краткое содержание
1	1	2	Метрические пространства. Основные метрические пространства, сходимость в метрических пространствах. Сжимающие операторы. Метод последовательных приближений
	2	2	Полные метрические пространства. Фундаментальная

			последовательность. Конечномерные и бесконечномерные пространства. Пополнение. Лемма Гейне-Бореля о покрытиях.
	3	2	Мера Лебега. Верхняя мера Лебега, измеримость множеств. Измеримые функции, измеримость непрерывных функций.
	4	2	Интеграл Лебега. Интегральные суммы Римана и Лебега. Простые функции, определение интеграла Лебега. Сходимость в среднем и сходимость почти всюду. Теорема Лебега. Счетная аддитивность интеграла.
2	5	2	Линейные нормированные пространства. Понятия линейного пространства и линейного подпространства. Линейно независимые системы. Размерность линейного пространства. Нормированные пространства. Понятия нормы, полунормы и банахова пространства. Основные банаховы пространства.
	6	2	Пространства со скалярным произведением. Понятия скалярного произведения и гильбертова пространства. Основные гильбертовы пространства. Весовые пространства Лебега. Ортогональные системы.
	7	2	Полные системы. Понятия полной системы и ортогонального базиса. Полные системы и ортогональные базисы в пространствах Лебега.
	8	2	Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и задача аппроксимации. Разложение вектора по ортонормированной системе в конечномерном пространстве. Разложение вектора по ортонормированной системе в бесконечномерном пространстве. Сходимость ряда Фурье. Приложение рядов Фурье к решению задач аппроксимации. Замечания о сходимости рядов Фурье
3	9	2	Понятие линейного оператора. Линейные интегральные операторы Фредгольма и Вольтерры. Линейные дифференциальные операторы, операторы Штурма-Лиувилля.
	10	2	Обратный оператор. Понятие обратимости. Критерий для линейных операторов. Обратимость линейных дифференциальных операторов второго порядка с начальными граничными условиями.
	11	2	Собственные числа и собственные векторы линейных операторов. Понятие собственного числа и собственного вектора. Собственные векторы симметричных операторов. Системы собственных функций для симметричных интегральных и дифференциальных операторов. Задача Штурма-Лиувилля. Применение собственных векторов для решения линейных уравнений
	12	2	Непрерывность операторов. Понятие непрерывности. Критерий для линейного оператора. Непрерывность интегральных операторов Фредгольма. Условия непрерывности для линейных дифференциальных операторов.
	13	2	Непрерывность обратного оператора. Понятие непрерывной обратимости. Критерий для линейных операторов. Понятие устойчивости для решения операторного уравнения. Условия для положительной определенности операторов Штурма-Лиувилля. Условия для непрерывной обратимости интегральных операторов Фредгольма

	14	2	Теория Фредгольма. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром. Иллюстрация теорем Фредгольма на примерах уравнений с выраженным ядром.
	15	2	Оптимизация функционалов в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса для линейных непрерывных функционалов. Дифференцирование и оптимизация функционалов. Метод Ритца для приближенной оптимизации функционалов
	16	2	Вариационный и проекционный подходы к приближенному решению линейных операторных уравнений. Вариационные методы. Функционал наименьших квадратов. Функционал энергии. Проекционные методы. Сходимость метода наименьших квадратов и метода Галеркина

4.2. Практические занятия

№ модуля дисциплины	№ практического занятия	Объем занятий (часы)	Краткое содержание
1	1	2	Метрические пространства. Принцип сжимающих отображений. Примеры пространств непрерывных функций с двумя различными метриками: максимального отклонения и среднего отклонения. Принцип сжимающих отображений для алгебраических уравнений и задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
	2	2	Пополнение. Примеры пополнений: пространство рациональных чисел, действительные числа с нестандартными метриками, пространство многочленов с метрикой максимального отклонения. Лемма Гейне-Бореля о покрытиях.
	3	2	Верхняя мера Лебега, измеримость множеств. Сравнение верхней меры Лебега и Жордана. Вычисление этих величин для множества рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Измеримость Канторова множества и его мера. Борелевские множества, примеры. Вычисление интеграла Лебега
	4	2	Пространство Лебега как пополнение пространства непрерывных функций по метрике среднего отклонения. Плотность множества многочленов и ступенчатых функций в пространстве Лебега.
	5	2	Контрольная работа №1
2	6	2	Линейные пространства. Норма, полунорма, скалярное произведение
	7	2	Гильбертовы пространства. Ортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации. Построение

			ортогональных многочленов Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита
	8	2	Ряды Фурье. Ортогональное дополнение, его замкнутость. Двойное ортогональное дополнение. Ортогонализация. Полиномы Эрмита.
	9	2	Ряды Фурье и задача аппроксимации. Качество сходимости ряда Фурье. Сравнение тригонометрической и полиномиальной аппроксимации. Сравнение ряда Фурье и ряда Тейлора
	10	2	Контрольная работа №2
3	11	2	Линейные операторы. Проверка линейности. Построение обратных операторов
	12	2	Собственные числа и собственные функции линейных операторов. Системы собственных функций для симметричных интегральных и дифференциальных операторов. Задача Штурма-Лиувилля. Применение собственных векторов для решения линейных уравнений
	13	2	Непрерывный и непрерывно обратимый линейный оператор. Операторы Штурма-Лиувилля. Интегральные операторы Фредгольма
	14	2	Оптимизация функционала. Дифференцирование и оптимизация функционалов. Метод Ритца для приближенной оптимизации функционалов
	15	2	Метод Галёркина и метод наименьших квадратов. Обоснование единственности решения и возможности применения методов, нахождения приближённых решений задачи Дирихле для дифференциальных уравнений, задачи Штурма-Лиувилля, интегрального уравнения Фредгольма.
	16	2	Контрольная работа №3.

4.3. Лабораторные работы

Не предусмотрены

4.4. Самостоятельная работа студентов

№ модуля	Объем занятий (часы)	Вид СРС
1	2	Выполнение текущих заданий по темам модуля 1
	4	Выполнение индивидуальных вариантов большого домашнего задания № 1
	2	Подготовка к контрольной работе №1
2	2	Выполнение текущих заданий по темам модуля 2
	4	Выполнение индивидуальных вариантов большого домашнего задания № 1
	2	Подготовка к контрольной работе №2
	8	Подготовка к коллоквиуму
3	2	Выполнение текущих заданий по темам модуля 3

	4	Выполнение индивидуальных вариантов большого домашнего задания № 2
	4	Выполнение индивидуальных заданий большого домашнего задания № 4
	2	Подготовка к контрольной работе №3

4.5. Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Не предусмотрены

5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Учебно-методическое обеспечение для самостоятельной работы студентов в составе УМК дисциплины (ОРИОКС// URL: , <http://orioks.miet.ru/>):

Общее

- ✓ Семестровый план организации занятий по дисциплине
- ✓ Порядок начисления баллов по накопительной балльной системе оценивания результативности обучения по дисциплине
- ✓ Содержание и порядок проведения экзамена

Модуль 1 «Полнота и интеграл Лебега»

- ✓ Теоретический материал по темам лекций (для всех видов самостоятельной работы)
- ✓ Учебно-методические материалы для выполнения текущих и индивидуальных больших домашних заданий;
- ✓ Примерные варианты контрольной работы

Модуль 2 «Линейные и гильбертовы пространства»

- ✓ Теоретический материал по темам лекций (для всех видов самостоятельной работы)
- ✓ Учебно-методические материалы для выполнения текущих и индивидуальных больших домашних заданий;
- ✓ Примерные варианты контрольной работы
- ✓ Список вопросов к коллоквиуму

Модуль 3 «Линейные операторы»

- ✓ Теоретический материал по темам лекций (для всех видов самостоятельной работы)
- ✓ Учебно-методические материалы для выполнения текущих и индивидуальных больших домашних заданий;
- ✓ Примерные варианты контрольной работы

6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Литература

- 1 Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-1274-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210809> (дата обращения: 28.08.2025)
- 2 Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / В. А. Треногин. - 4-е, изд. -

- Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 488 с. — ISBN 978-5-9221-0804-1. - Текст : электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/59471> (дата обращения: 28.08.2025)
- 3 Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 176 с. — ISBN 978-5-8114-1821-3. - Текст : электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212048> (дата обращения: 28.08.2025).
- 4 Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 240 с. — ISBN 978-5-8114-1822-0. - Текст : электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212057> (дата обращения: 28.08.2025).

Периодические издания

1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ / Российская академия наук, ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. - М. : ФГБУН МИ им. В.А. Стеклова РАН, 1967 -. - <http://www.mathnet.ru/faa> (дата обращения: 28.08.2025). - Режим доступа: свободный. - ISSN 0374-1990 (print), 2305-2899 (online). - Текст : электронный

7. ПЕРЕЧЕНЬ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ БАЗ ДАННЫХ, ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ

1. Лань : Электронно-библиотечная система Издательства Лань. - СПб., 2011-. - URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 28.08.2025). - Режим доступа: для авторизованных пользователей МИЭТ
2. eLIBRARY.RU : Научная электронная библиотека: сайт. - Москва, 2000 -. - URL: <https://www.elibrary.ru/defaultx.asp> (дата обращения: 28.08.2025). - Режим доступа: для зарегистрированных пользователей
3. Math-Net.Ru: общероссийский математический портал: сайт. — Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2020. — URL: <http://www.mathnet.ru/> (дата обращения: 28.08.2025). — Режим доступа: для зарегистрированных пользователей.

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Дисциплина реализуется путем проведения лекционных и практических занятий по расписанию в аудиториях вуза, групповых консультаций, а также внеаудиторной самостоятельной работы.

Практические занятия проводятся в форме совместного решения типовых заданий и обсуждения нетиповых задач. После каждого практического занятия студенты выполняют домашнюю работу по теме занятия, состоящую из единого для всех студентов набора типовых и нетиповых заданий. На следующем занятии выполнение домашней работы выборочно проверяется. Возникшие у студентов затруднения обсуждаются.

В обучении используются внутренние электронные ресурсы (видео-лекции, текстовые материалы лекций и практических занятий, указания к выполнению индивидуальных заданий) электронной информационно-образовательной среды ОРИОКС

<http://orioks.miet.ru>. Основное назначение этих ресурсов – оказание помощи студентам при самостоятельной работе, а также в самостоятельном освоении отдельных тем дисциплины при пропуске занятий. Они могут также использоваться для более углубленного изучения дисциплины и при подготовке к сдаче промежуточной аттестации, при назначении индивидуальных учебных планов студенту.

Информационно-коммуникативные технологии с использованием сети Интернет применяются для консультирования студентов, приема выполненных индивидуальных заданий, выполнения тестов самопроверки.

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность учебных аудиторий и помещений для самостоятельной работы	Перечень программного обеспечения
Учебная аудитория	Учебная доска Мультимедийное оборудование (компьютер с ПО и возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронно-образовательную среду МИЭТ; телевизоры; акустическое оборудование (микрофон, звуковые колонки))	Операционная система Microsoft Windows от 7 версии и выше, Microsoft Office Professional Plus или Open Office, браузер (Firefox, Google Chrome); Acrobat reader DC
Учебная аудитория	Учебная доска	ПО не требуется
Помещение для самостоятельной работы обучающихся	Компьютерная техника с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду МИЭТ	Операционная система Microsoft Windows от 7 версии и выше, Microsoft Office Professional Plus или Open Office, браузер (Firefox, Google Chrome); Acrobat reader DC, Python

10. ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ/ПОДКОМПЕТЕНЦИЙ

ФОС по подкомпетенции ОПК-1 ФункАн. Способен использовать понятия и положения функционального анализа при решении задач в области естественных наук и инженерной практике.

Фонд оценочных средств представлен отдельным документом и размещен в составе УМК дисциплины электронной информационной образовательной среды ОРИОКС// URL: <http://orioks.miet.ru/>.

11. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

11.1. Особенности организации процесса обучения

Дисциплина изучается в течение одного семестра. Ежеженедельно читается одна лекция и проводится одно практическое занятие.

Посещение лекций и практических занятий является обязательным.

Кроме того, еженедельно лектором и преподавателями, ведущими практические занятия, проводятся консультации. Графики консультаций сообщаются лектором и преподавателем и размещаются в ОРИОКС: <http://orioks.miet.ru/>. Посещение еженедельных консультаций, кроме групповых, не является для студентов обязательным за исключением случаев персонального приглашения преподавателем студента на консультацию.

Групповые консультации предназначены для защиты индивидуальных больших домашних заданий, проведения коллоквиумов и являются обязательными для посещения студентами.

Все содержание дисциплины разбито на два модуля. Каждый модуль является логически завершённой частью курса. Успешность освоения каждого модуля оценивается по результатам выполнения обязательных контрольных мероприятий, а также качеством выполнения студентом текущих домашних заданий к практическим занятиям.

График обязательных контрольных мероприятий разрабатывается и утверждается до начала семестра.

Индивидуальные большие домашние задания (БДЗ) включают многошаговые практические задания по темам лекций и практических занятий, а также задания прикладной направленности. Помимо этого, для развития цифровых компетенций в БДЗ включены задания, требующие поиска информации, привлечения прикладных математических программ для решения задания и визуализации полученного решения.

Индивидуальные варианты БДЗ выдаются студентам заранее на срок, как правило, не менее двух недель. Студенты выполняют БДЗ в письменной форме в рамках времени, отведённого на самостоятельную работу. Студент должен не только решить задания, но и полно, логично изложить решение. В процессе выполнения студенты могут обратиться за консультацией к преподавателю. Выполненные работы сдаются преподавателю на проверку. Преподаватель помечает ошибки и производит предварительное оценивание. Затем во время групповых консультаций выполнение работ защищается. Защита БДЗ

имеет целью: (1) подтвердить самостоятельность выполнения студентом заданий; (2) предоставить студенту возможность улучшить результат путём исправления ошибок (при необходимости преподаватель «подсказывает» студенту пути их исправления). Защиту проводит преподаватель, ведущий практическое занятие по дисциплине. Особое внимание студенты должны обратить на сроки выполнения БДЗ. При нарушении сроков без уважительных причин выполненные задания не проверяются и не оцениваются.

Коллоквиум проводится на групповых консультациях. Студентам не менее чем за 10 дней сообщается программа коллоквиума и уточняется время его проведения. Коллоквиумы проводятся в два этапа. Первый этап может состоять в выполнении письменной работы по билетам, содержащим как теоретические, так и практические задания, так и в форме тестирования, включающем также как теоретические, так и практические задания. Второй этап проходит в форме устного собеседования (проверяется качество усвоения студентом доказательств теоретических утверждений). Итоговая оценка выставляется по сумме баллов за 1-й и 2-й этап. Коллоквиум проводят лектор дисциплины, преподаватель, ведущий практические занятия в группе, а также другие преподаватели, имеющие опыт преподавания дисциплины.

В начале семестра студентам предоставляется семестровый план организации занятий по дисциплине. План содержит описание содержания лекций (для каждой лекции описывается ее содержание и указываются параграфы или страницы учебных пособий, а также внешних электронных ресурсов, в которых изложено ее содержание); планы практических занятий с указанием номеров задач из указанной литературы для решения в аудитории и самостоятельно, темы индивидуальных домашних заданий, сроки их выдачи и приема решений; темы, длительность и сроки контрольных работ, используемые базы данных и электронные материалы из ОРИОКС. Семестровый план размещается в ОРИОКС: <http://orioks.miet.ru/>.

Лектор дисциплины или преподаватель может рекомендовать дополнительные учебные материалы в ходе семестра. Они могут размещаться в ОРИОКС.

На первой неделе семестра утверждается порядок начисления баллов по накопительной балльной системе выставления оценки по дисциплине. Данный порядок размещается в ОРИОКС и доступен студентам в личном кабинете.

На лекциях, в связи с имеющимися проблемами у студентов по освоению теоретического материала дисциплины, для обеспечения оперативной обратной связи и контроля за посещением лекций, могут проводиться краткие тесты по выяснению степени усвоения студентами пройденного теоретического материала.

Организация промежуточной аттестации по дисциплине в форме экзамена включает самостоятельную работу студентов во время экзаменационной сессии в соответствии с ее расписанием и контактную работу с преподавателем во время проведения экзамена.

11.2. Система контроля и оценивания.

Для оценки успеваемости студентов по дисциплине используется накопительная балльная система. Порядок начисления баллов за освоение дисциплины в семестрах и на экзаменах утверждается в начале семестра.

По сумме баллов выставляется итоговая оценка по дисциплине за семестр.

Структура контрольных мероприятий, график их проведения, порядок начисления баллов размещаются в ОРИОКС <http://orioks.miet.ru/>.

РАЗРАБОТЧИК:

Доцент каф. ВМ-1, к.ф.-м.н., доцент



/Т.В. Соколова/

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» разработана на кафедре ВМ-1 и утверждена на заседании кафедры 25.02 2026 года, протокол № 8

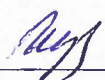
Заведующий кафедрой ВМ-1  /А.А. Прокофьев/

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ

Рабочая программа согласована с Центром подготовки к аккредитации и независимой оценки качества

Начальник АНОК  / И.М. Никулина /

Рабочая программа согласована с библиотекой МИЭТ

Директор библиотеки  / Т.П. Филиппова /